Arithmétique

I) Simplifier en décomposant en facteurs premiers :

1) $\frac{48}{72}$; **2)** $\frac{105}{385}$; **3)** $\frac{2100}{280}$; **4)** $\frac{18675}{15750}$; **5)** $\frac{8316}{9828}$; **6)** $\frac{115}{108}$; **7)** $\frac{91}{104}$; **8)** $\frac{693}{819}$.

II) ***Diviseurs communs***

Les diviseurs de 24 sont: ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; et ….. .

Les diviseurs de 36 sont: ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. et ….. .

Les ***diviseurs communs*** à24 et 36 sont ceux qui se trouvent dans les deux listes àla fois.

Ce sont donc: ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. et ….. .

Le ***plus grand diviseur commun*** est le plus grand nombre qui divise àla fois 24 et 36.

C'est donc ……. On écrira en abrégé **12 = PGDC(24 ; 36)** ***(plus grand diviseur commun de 24 et 36)*** mais vous verrez plus souvent 12 = PG**CD**(24 ; 36) ***(plus grand commun diviseur de 24 et 36).***

Maintenant, donnez tous les diviseurs de 12 : ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. .

Comparez avec les diviseurs communs obtenus… Pour déterminer tous les diviseurs communs àdeux nombres, il suffit de déterminer les diviseurs de leur ………! De même :

Les diviseurs de 72 sont ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. et ….. .

Les diviseurs de 48 sont ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. et ….. .

Entourez dans les deux listes les diviseurs communs. Le ***PGCD*** de 48 et 72 est ….. .

Les diviseurs du PGCD sont ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. et ….. .
Vérifiez que vous retrouvez bien tous les nombres entourés.

III) Prenons le cas de la première fraction du I).

On a vu en simplifiant cette fraction que $\frac{48}{72} = \frac{\ldots}{\ldots}$. Par quel nombre aurait-on pu diviser le numérateur et le dénominateur pour obtenir directement le résultat ? : …….

Or 24 est le ………. de 48 et 72.

Considérons la deuxième fraction du I). En simplifiant, $\frac{105}{385} = \frac{\ldots}{\ldots}$.

Les diviseurs de 105 sont : ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. et ….. .

Les diviseurs de 385 sont : ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. et ….. .

Le PGCD de 105 et 385 est : …..

Divisons le numérateur et le dénominateur de $\frac{105}{385}$ par ce PGCD. $\frac{105}{385} = \frac{105 \div \ldots}{385 \div \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$.

Donc, pour simplifier une fraction, il suffit de diviser directement le numérateur et le dénominateur par leur ……. .

En utilisant les résultats du I), compléter :

PGCD(2100 ; 280) = ….. ; PGCD(18675 ; 15750) = ….. ; PGDC(8316 ; 9828) = ….. ;

PGDC(115 ; 108) = ….. ; PGCD (91 ; 104) = ….. ; PGCD (693 ; 819) = …..

En utilisant les résultats précédents, donnez **sans écrire la liste des diviseurs** tous les **diviseurs communs** à2100 et 280 : …..; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. .

De même, donnez tous les diviseurs communs à693 et 819 : ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. .

IV) Comment déterminer rapidement le PGCD de deux nombres ?

Commencez par compléter l'encadré de droite.
Sur ce principe, déterminons par exemple le **PGCD de 2574 et 1386**.

D'après l'algorithme d'Euclide,

2574 = ….. $\times$ 1386 + …..
1386 = ….. $\times$ …..   + $\boxed{…..}$
…… = ….. $\times$ ….. + 0

Donc le PGCD de 2574 et 1386 est ….. .

<u>Conséquences :</u> Si on veut simplifier la fraction $\frac{2574}{1386}$, il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par ….. .

$\frac{2574}{1386} = \frac{2574 \div …..}{1386 \div …..} = \frac{…..}{…..}$.

D'autre part, si on veut trouver tous les diviseurs communs à 2574 et 1386, il suffit de déterminer les diviseurs de leur PGCD, donc les diviseurs de ….. .

Donc les diviseurs communs à 2574 et 1386 sont :
….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. ; ….. et ….. .

L'algorithme d' Euclide :

On veut par exemple déterminer le PGCD de 105 et 385.
Pour cela, on effectue la division euclidienne (ce qui signifie avec reste) du **plus grand nombre** par **le plus petit**. On peut donc écrire :

385 = ….. $\times$ 105 + ….. .

$$\begin{array}{r|l} 3\ 8\ 5 & 1\ 0\ 5 \\ \underline{-\ 3\ 1\ 5} & \\ 7\ 0 & 3 \end{array}$$

Puis on recommence l'opération avec le **<u>diviseur</u>** et le **<u>reste.</u>**
Et on écrit :

105 = ….. $\times$ 70 + ….. .

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0\ 5 & 7\ 0 \\ \underline{-\ \ .\ \ .} & \\ .\ \ . & . \end{array}$$

On recommence encore une fois l'opération avec le **<u>diviseur</u>** et le **<u>reste</u>** obtenus :

70 = ….. $\times$ 35 + ….. .

$$\begin{array}{r|l} 7\ 0 & 3\ 5 \\ \underline{-\ .\ \ .} & \\ . & . \end{array}$$

Et ici, le **<u>reste</u>** vaut …. . Le calcul est alors fini, car, avec l'algorithme d'Euclide, le PGCD que l'on recherche est le dernier **reste** **<u>non nul</u>**. Le dernier reste non nul qu'on a obtenu est celui de la deuxième opération.
Le PGCD de 385 et 105 est donc ….. .

V) Calculez avec l'algorithme d'Euclide : PGCD(48 ; 72) ; PGCD(2100 ; 280) ; PGCD(18675 ; 15750) ; PGCD(115 ; 108) ; PGCD(91 ; 104) ; PGCD(693 ; 819).
Puis comparez les résultats obtenus avec ceux du III).

VI) Vu au brevet …

1) Calculer le PGCD de 1053 et 325 puis simplifier $\frac{325}{1053}$. *(Bordeaux)*

2) **a)** Calculer le PGCD de 110 et 88.
b) Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante : "Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte."
Quelle sera la longueur du côté d'un carré ? Combien obtiendra-t-on de carrés par plaque ? *(Caen)*

3) Calculer le PGCD de 114400 et 60775. Expliquer comment ***rendre irréductible*** *(ce qui signifie "Simplifier au maximum")* la fraction $\frac{60775}{114400}$. Simplifiez la… *(Limoges)*

Le PGCD de 11 et 13 est 1. Cela signifie notamment qu'on ne peut pas simplifier la fraction $\frac{11}{13}$.
On dit que **11 et 13 sont "Premiers entre eux".**

4) Démontrer que les nombres 65 et 42 sont premiers entre eux. *(Nantes)*

5) On pose M = $\frac{20755}{9488} - \frac{3}{8}$.

a) Calculer le plus grand diviseur commun D aux deux nombres 20755 et 9488.

b) Ecrire en détaillant les calculs le nombre M sous la forme d'une fraction irréductible. *(Orléans-Tours)*

VII) En utilisant l'algorithme d'Euclide, donner parmi les fractions suivantes celles qui sont irréductibles :

$$\frac{1515}{1547} \; ; \; \frac{495}{297} \; ; \; \frac{351}{243} \; ; \; \frac{1789}{1989} \; ;$$

VIII) Un espion observe deux camions qui sortent d'une usine, en transportant des machines inconnues toutes absolument identiques. Après passage sur la balance située à la sortie de l'usine, l'espion constate que ces camions transportent respectivement des chargements de 1972 kg de 2108 kg. Par une indiscrétion, l'espion sait que chaque machine pèse un nombre entier de kilogrammes.

1) Combien pèse au maximum une de ces machines, et dans ce cas, combien y a-t-il au total de machines dans les deux camions ?

2) Donner toutes les autres possibilités quant au poids des machines. (On ne demande pas combien il y en a).

IX) On appelle $\boxed{\text{nombre premier}}$ un nombre qui n'est divisible que par 1 et lui même.
Citer tous les nombres premiers inférieurs à 100.

X) Les ensembles :

On appelle $\mathbb{N}$ l'ensemble des $\boxed{\text{entiers naturels}}$. Cet ensemble contient tous les nombres <u>entiers positifs ou nuls.</u>

On appelle $\mathbb{Z}$ l'ensemble des $\boxed{\text{entiers relatifs}}$. Cet ensemble contient tous les nombres <u>entiers positifs ou négatifs</u>.

On appelle $\mathbb{D}$ l'ensemble des $\boxed{\text{nombres décimaux}}$. Cet ensemble contient tous les nombres <u>positifs ou négatifs</u> qui peuvent s'écrire avec un <u>nombre fini</u> de chiffres derrière la virgule.

On appelle $\mathbb{Q}$ l'ensemble des $\boxed{\text{nombres rationnels}}$. Cet ensemble contient tous les nombres <u>qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction</u>.

On appelle $\mathbb{R}$ l'ensemble des $\boxed{\text{nombres réels}}$. Cet ensemble contient <u>tous les nombres que vous connaissez.</u>

1) Mettre une croix lorsque le nombre appartient à l'ensemble indiqué :
(Un même nombre peut appartenir à plusieurs ensembles !)

	-2	$\frac{3}{4}$	4,5	7	p	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{16}$	-3,4	0	$-\frac{6}{2}$	100	-4,3	7,1	1,0
$\mathbb{N}$															
$\mathbb{Z}$															
$\mathbb{D}$															
$\mathbb{Q}$															
$\mathbb{R}$															

2) Citer un nombre de $\mathbb{R}$ qui appartient à: **a)** $\mathbb{N}$:…… ; **b)** $\mathbb{Z}$:…… ; **c)** $\mathbb{D}$:…… ; **d)** $\mathbb{Q}$:……

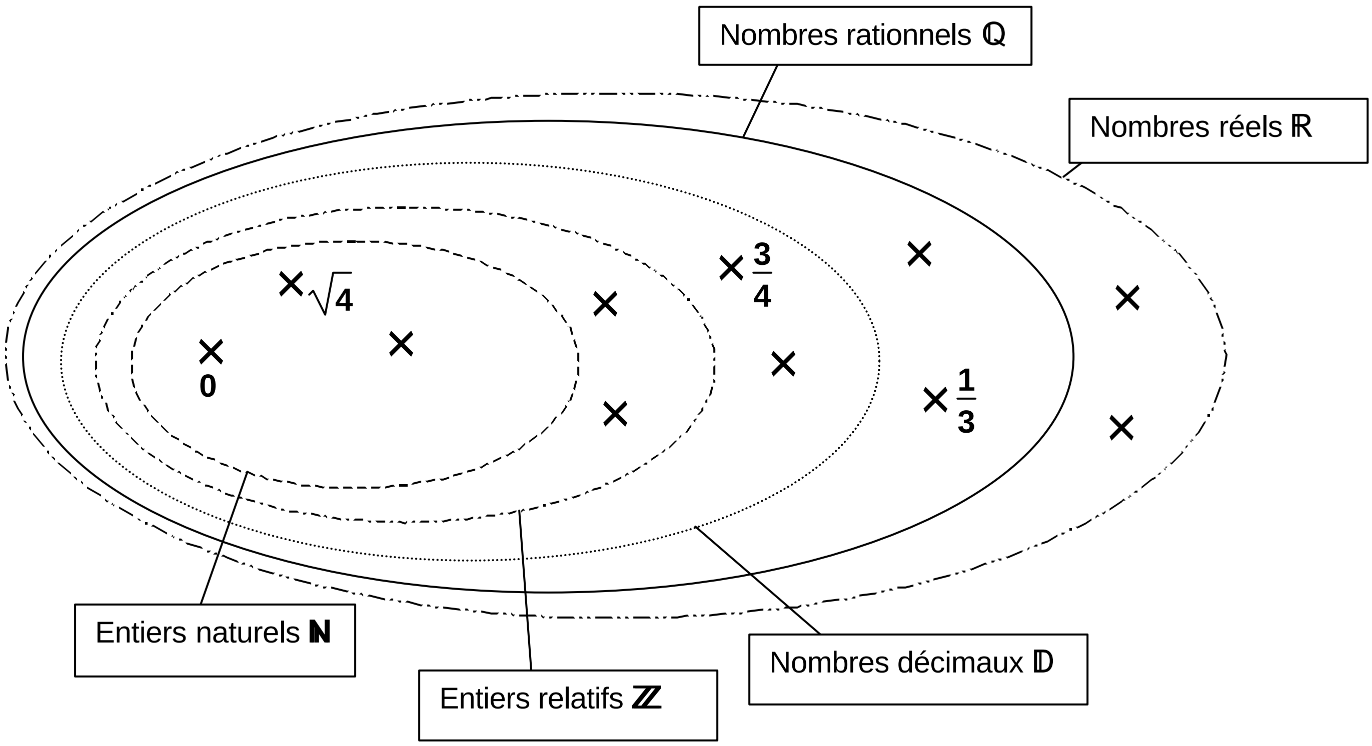
3) Citer un nombre de $\mathbb{R}$ qui n'appartient pas à: **a)** $\mathbb{N}$:…… ; **b)** $\mathbb{Z}$:…… ; **c)** $\mathbb{D}$:…… ; **d)** $\mathbb{Q}$:……

4) Citer un nombre de $\mathbb{Q}$ qui appartient à: **a)** $\mathbb{N}$:…… ; **b)** $\mathbb{Z}$:…… ; **c)** $\mathbb{D}$:…… ;

5) Citer un nombre de $\mathbb{Q}$ qui n'appartient pas à: **a)** $\mathbb{N}$:…… ; **b)** $\mathbb{Z}$:…… ; **c)** $\mathbb{D}$:…… ;

6) Citer un nombre de $\mathbb{D}$ qui appartient à: **a)** $\mathbb{N}$:…… ; **b)** $\mathbb{Z}$:……

7) Citer un nombre de $\mathbb{D}$ qui n'appartient pas à: **a)** $\mathbb{N}$:…… ; **b)** $\mathbb{Z}$:……



8) Compléter le dessin ci-dessus en plaçant un nombre près de chaque croix.

XI) Marcel sort de son appartement et décide de prendre l'escalier. Il descend 238 marches pour parvenir au rez-de-chaussée. C'est alors qu'il s'aperçoit qu'il a oublié ses clés de voiture ! Il remonte 182 marches, et, parvenu sur un palier, décide de prendre l'ascenseur pour effectuer le trajet restant.
A quel étage ***au minimum*** Maurice habite-t-il, sachant qu'il y a toujours le même nombre de marches entre deux étages ?

XII) Un truc : Pour connaître le nombre de diviseurs d'un nombre (sans nécessairement les déterminer) il suffit de décomposer ce nombre en facteurs premiers. Par exemple : $1008 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$.

Puis on **regroupe les facteurs en utilisant les puissances** : $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7^1$.

A ce stade, on ne s'occupe plus que des puissances, qui sont 4, 2 et 1. **On ajoute 1 à chaque puissance**, ce qui donne 5, 3 et 2, et **on multiplie tous les nombres obtenus**.
Cela donne $5 \times 3 \times 2 = 30$.
1008 a donc 30 diviseurs.

1) Déterminer le nombre de diviseurs de : 96 ; 200 ; 31 ; 93312.

2) Quel est le plus petit nombre ayant **plus de 12 diviseurs ?**

3) Quel est le plus petit nombre ayant **105 diviseurs ?**

Eléments de correction :

I) $\frac{48}{72}=\frac{2\times2\times2\times2\times3}{2\times2\times2\times3\times3}=\frac{2}{3}$; $\frac{105}{385}=\frac{5\times3\times7}{5\times7\times11}=\frac{3}{11}$; $\frac{2100}{280}=\frac{2\times2\times3\times5\times5\times7}{2\times2\times2\times5\times7}=\frac{15}{2}$

$\frac{18675}{15750}=\frac{3\times3\times5\times5\times83}{2\times3\times3\times5\times5\times5\times7}=\frac{83}{70}$; $\frac{8316}{9828}=\frac{2\times2\times3\times3\times3\times7\times11}{2\times2\times3\times3\times3\times7\times13}=\frac{11}{13}$

$\frac{115}{108}=\frac{5\times23}{2\times2\times3\times3\times3}=\frac{115}{108}$; $\frac{91}{104}=\frac{7\times13}{2\times2\times2\times13}=\frac{7}{8}$; $\frac{693}{819}=\frac{3\times3\times7\times11}{3\times3\times7\times13}=\frac{11}{13}$

III) Diviseurs de 105 : 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 et 105. Diviseurs de 385 : 1, 5, 7, 11, 35, 55, 77, 383.
PGCD(105;385) = 35.

PGCD(2100;280)=140 PGCD(18675;15750)=225 PGCD(8316;9828)=756
PGCD(115;108)=1 PGCD(91;104)=13 PGCD(693;819)=63.

Diviseurs communs à2100 et 280 : 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140.
Diviseurs communs à693 et 819 : 1, 3, 7, 9, 21, 63.

IV) PGCD(2574,1386)=198 ; $\frac{2574}{1386}=\frac{13}{7}$
Les diviseurs communs sont 1, 2, 3, 6, 9, 11, 18, 22, 33, 66, 99 et 198.

VI) 1) 13 ; $\frac{81}{25}$; 2) a) 22 ; b) 22 cm ; 20 . 3) 3575 ; $\frac{32}{17}$; 5) 593 ; $\frac{29}{16}$
VII) Les PGCD sont 1, 99, 27 et 1.

VIII) 1) 68 kg ; 2) 1, 2, 4, 17, 34 kg.

IX) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97

XI) Il y a au maximum 14 marches, donc au minimum 17 étages.

XII) 1) 96 : 12 diviseurs ; 200 : 12 diviseurs ; 31 : 2 diviseurs ; 93312 = $2^7\times3^6$ et a 56 diviseurs.
2) 144.
3) 105 = $3\times5\times7$. Le nombre est donc de la forme $a^2\times b^4\times c^6$, avec a, b et c nombres premiers distincts.
La meilleure solution est donc $5^2\times3^4\times2^6$ = 129600.